Peluang Suatu Kejadian, Kaidah Penjumlahan, Peluang Bersyarat, Kaidah Perkalian dan Kaidah Baiyes

1.Peluang Suatu Kejadian

Definisi :

Peluang suatu kejadian A adalah jumlah peluang semua titik contoh dalam A.

Dengan demikian : $0 \leq P(A) \leq 1$, P(ϕ) = 0 dan P(S) = 1.

Contoh :

Sekeping uang logam dilemparkan dua kali. Hitunglah peluang sekurang–kurangnya sisi gambar muncul sekali !

Jawab

Mis : A = kejadian sekurang–kurangnya sisi gambar muncul sekali.

Sisi gambar dilambangkan dengan G dan sisi angka dilambangkan sebagai A.

S = {AA, AG, GA, GG}

Karena ada 3 buah anggota S yang sekurang–kurangnya memiliki 1 sisi gambar dan setiap anggota S memiliki peluang yang sama untuk muncul , maka :

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

Jadi peluang sekurang–kurangnya sisi gambar gambar muncul sekali adalah $\frac{3}{4}$.

Dalil I :

Bila suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan yang berbeda dan masing–masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi dan bila tepat n di antar hasil percobaan itu menyusun kejadian A, maka peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Contoh :

Hitunglah peluang memperoleh kartu hati bila sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge !

Jawab

Mis : A = kejadian memproleh sebuah kartu hati

Karena kartu bridge berjumlah 52 maka N = 52.

Karena kartu hati berjumlah 13 dan masing–masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi maka n = 13.

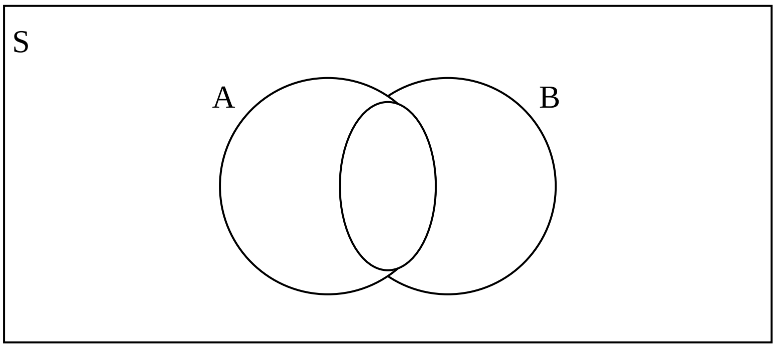
Sehingga : P(A) $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Jadi peluang memperoleh sebuah kartu hati dari seperangkat karut bridge adalah $\frac{1}{4}$.

2.Kaidah Penjumlahan

Dalil I :

Bila A dan B adalah dua kejadian yang sembarang



Maka :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bukti :

Perhatikan Diagram Venn di atas.

$P(A \cup B)$ merupakan jumlah semua titik contoh dalam $A \cup B$, sedangkan P(A) + P(B) adalah jumlah semua peluang dalam A ditambah jumlah semua peluang dalam B. Dengan demikian, kita telah menambahkan peluang dalam $A \cap B$ sebanyak 2 kali. Karena jumlah peluang dalam $A \cap B$ adalah $P(A \cap B)$, maka kita harus mengurangkan peluang ini sekali untuk mendapatkan jumlah peluang dalam $A \cup B$, yaitu $P(A \cap B)$.

Contoh :

Peluang seorang siswa lulus pelajaran matematika adalah $\frac{2}{3}$ dan peluang ia lulus pelajaran bahasa inggris adalah $\frac{4}{9}$. Bila peluang ia lulus keduanya adalah $\frac{1}{6}$, tentukan peluang ia lulus sekurang–kurangnya satu pelajaran di atas !

Jawab

Mis : A = kejadian siswa tersebut lulus pelajaran matematika

B = kejadian siswa tersebut lulus pelajaran bahasa inggris

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{4}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

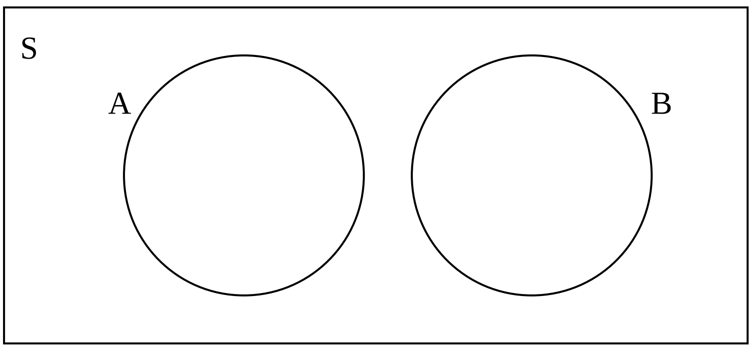
$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{12}{18} + \frac{8}{18} - \frac{3}{18}$$

$$= \frac{17}{18}$$

Korolari I :

Bila kejadian A dan B saling terpisah :



Maka :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bukti :

Perhatikan Diagram Venn di atas.

Karena kejadian A dan B saling terpisah maka $A \cap B = \phi$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(\phi) \\ &= P(A) + P(B) - 0 \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Contoh :

Berapa peluang mendapatkan jumlah 7 atau 11 bila sepasang dadu dilemparkan sekali ?

Jawab

Karena masing–masing dadu memiliki 6 titik contoh dan dilemparkan sekali maka banyak titik contoh dalam S adalah $n(S) = 6^2 = 36$.

Perhatikan tabel berikut :

Dadu II / Dadu I	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Mis : A = kejadian sepasang dadu berjumlah 7

B = kejadian sepasang dadu berjumlah 11

Maka : A = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)} $\Rightarrow n(A) = 6$

B = {(5,6), (6,5)} $\Rightarrow n(B) = 2$

$A \cap B = \{ \}$ $\Rightarrow$ kejadian saling terpisah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36}$$

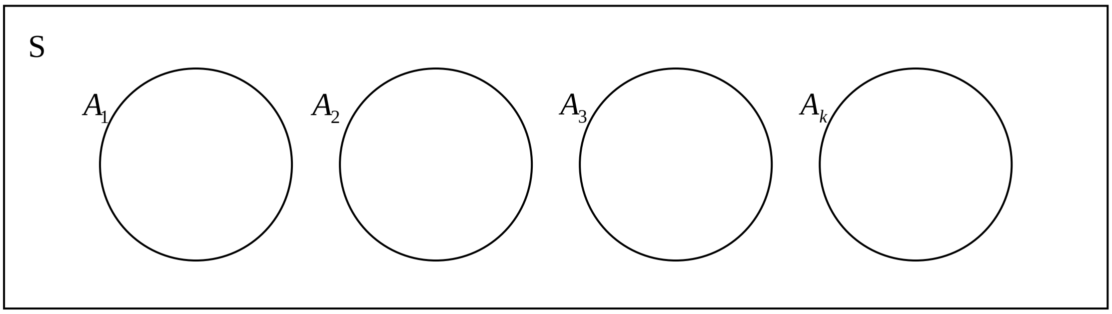
$$= \frac{8}{36}$$

$$= \frac{2}{9}$$

Jadi peluang mendapatkan jumlah 7 atau 11 bila sepasang dadu dilemparkan sekali adalah $\frac{2}{9}$

Korolari II :

Bila A_1, A_2, A_3, …., A_k adalah kejadian – kejadian saling terpisah :

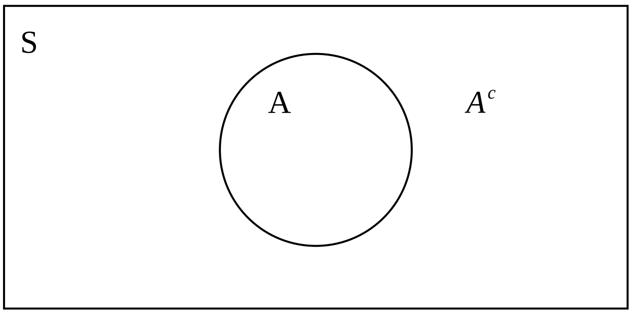


Maka :

$$P(A \cup B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_k)$$

Dalil II :

Bila A dan A^c adalah dua kejadian yang satu merupakan komplemen lainnya :



Maka : $$P(A) + P(A^c) = 1$$

Bukti :

$$P(S) = 1$$

$$P(A \cup A^c) = 1$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

Contoh :

Sekeping uang logam dilemparkan sebanyak 6 kali. Tentukan peluang sekurang–kurangnya sisi gambar muncul sekali !

Jawab

Karena uang logam memiliki 2 titik contoh , yaitu sisi angka (A) dan sisi gambar (G) dan uang logam tersebut dilemparkan sebanyak 6 kali, maka banyaknya anggota S adalah $n(S) = 2^6 = 64$.

Karena anggota S terlalu banyak dan untuk mengefisienkan waktu, maka kita mencoba untuk berpikir bahwa pasti ada 1 titik contoh yang tidak memuat sisi gambar sama sekali, yaitu : AAAAAA.

Mis : A = kejadian sekurang–kurangnya sisi gambar muncul sekali

A^c = kejadian bahwa sisi gambar tidak muncul sama sekali

$n(A^c) = 1$

Maka : $P(A) = 1 - P(A^c)$

$$= 1 - \frac{1}{64}$$

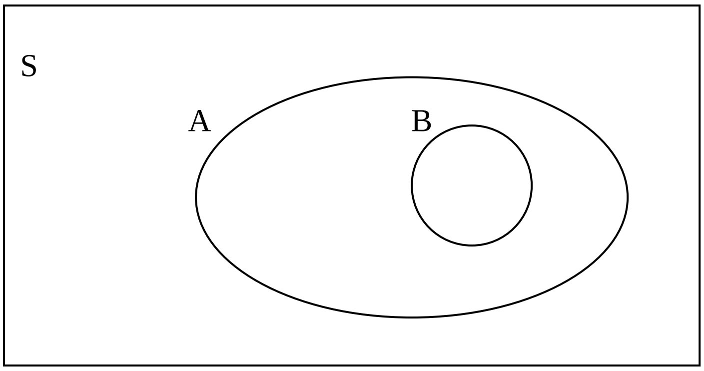
$$= \frac{63}{64}$$

Jadi peluang sekurang–kurangnya sisi gambar muncul sekali adalah $\frac{63}{64}$.

3.Peluang Bersyarat

Definisi :

Peluang bersyarat B bila A diketahui, dilambangkan dengan $P(B/A)$:



Didefinisikan sebagai berikut :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Bukti :

$$n(B/A) = n(A \cap B)$$

$$P(B/A) = \frac{n(B/A)}{n(A)}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \times \frac{\frac{1}{n(S)}}{\frac{1}{n(S)}}$$

$$= \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Contoh :

Peluang suatu penerbangan reguler berangkat tepat pada waktunya adalah 0,5, peluang penerbangan itu mendarat tepat pada waktunya adalah 0,75 dan peluang penerbangan itu bernagkat dan mendarat tepat pada waktunya adalah 0,25. Hitunglah peluang penerbangan itu :

a. mendarat tepat pada waktunya bila diketahui berangkat tepat pada waktunya.

b. berangkat tepat pada waktunya bila diketahui mendarat tepat pada waktunya.

Jawab

Mis : A = kejadian penerbangan tersebut berangkat tepat pada waktunya

B = kejadian penerbangan tersebut mendarat tepat pada waktunya

$P(A) = 0,5$

$P(B) = 0,75$

$P(A \cap B) = 0,25$

Maka :

a. $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{0,25}{0,5}$

$= \frac{1}{2}$

b. $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{0,25}{0,75}$

$= \frac{1}{3}$

Jadi peluang penerbangan itu mendarat tepat pada waktunya bila diketahui berangkat tepat pada waktunya adalah $\frac{1}{2}$ dan peluang penerbangan itu berangkat tepat pada waktunya bila diketahui mendarat tepat pada waktunya adalah $\frac{1}{3}$.

4.**Kaidah Perkalian (Kaidah Penggandaan)**

Dalil I :

Bila dalam suatu percobaan, kejadian A dan B dapat terjadi sekaligus, maka :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

Contoh :

Misalkan kita mempunyai sebuah kotak yang berisi 20 sekering, 5 di antaranya rusak. Kita akan mengambil 2 sekering tanpa pengembalian. Tentukan peluang terambilnya sekering itu keduanya rusak !

Jawab

Mis : A = kejadian terambilnya sekering rusak pada pengambilan I

B/A = kejadian terambilnya sekering rusak pada pengambilan II

Maka :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$= \frac{5}{20} \times \frac{4}{19}$$

$$= \frac{1}{19}$$

Jadi peluang terambilnya sekering itu keduanya rusak adalah $\frac{1}{19}$.

Dalil II :

Bila kejadian A dan B saling bebas, maka :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Bukti :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$= P(A) \times P(B) \qquad \text{(karena } P(B/A) = P(B)\text{)}$$

Contoh :

Sebuah desa memiliki 1 mobil pemadam kebakaran dan 1 mobil ambulans. Peluang mobil pemadam kebakaran dapat digunakan pada saat diperlukan adalah 0,6 dan peluang mobil ambulans dapat digunakan pada saat diperlukan adalah 0,8. Bila terjadi kecelakaan akibat kebakaran, hitunglah peluang mobil pemadam kebakaran dan mobil ambulans keduanya dapat digunakan pada saat diperlukan !

Jawab

Mis :A = kejadian mobil pemadam kebakaran dapat digunakan pada saat diperlukan

B = kejadian mobil ambulans dapat digunakan pada saat diperlukan

$P(A) = 0{,}6$

$P(B) = 0{,}8$

Maka : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$= 0{,}6 \times 0{,}8$$

$$= 0{,}48$$

Jadi peluang mobil pemadam kebakaran dan mobil ambulans keduanya dapat digunakan pada saat diperlukan adalah 0,48.

Dalil III :

Bila dalam suatu percobaan, kejadian–kejadian A_1, A_2, A_3, …., A_k dapat terjadi sekaligus, maka :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ..... \cap A_k) =$$
$$P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 \cap A_2) \times .... \times P(A_k / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ..... \cap A_{k-1})$$

Bila dalam suatu percobaan, kejadian–kejadian A_1, A_2, A_3, …., A_k saling bebas, maka :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ..... \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times .... \times P(A_k)$$

Contoh :

Dari seperangkat kartu bridge akan diambil 3 kartu secara berturut–turut tanpa pengembalian. Tentukan peluang terambilnya 3 kartu tersebut bila kartu yang terambil pertama adalah kartu As merah, kartu yang terambil kedua adalah kartu sepuluh dan kartu yang terambil ketiga adalah kartu yang lebih besar dari 3 tetapi lebih kecil dari 7 !

Jawab

Mis : A = kejadian kartu yang terambil pertama adalah kartu As merah

B/A = kejadian kartu yang terambil kedua adalah kartu sepuluh

C/A $\cap$ B = kejadian kartu yang terambil ketiga adalah kartu yang lebih besar dari 3 tetapi lebih kecil dari 7

$n(S) = 52$

Maka : $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B / A) \times P(C / A \cap B)$

$$= \frac{2}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{12}{50}$$

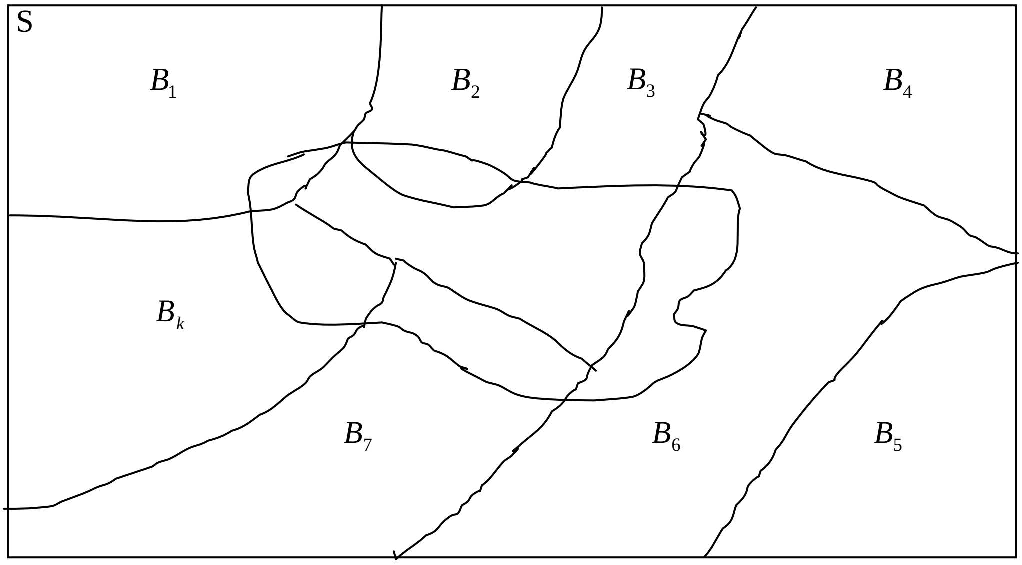
$$= \frac{4}{5525}$$

Jadi peluang terambilnya 3 kartu tersebut bila kartu yang terambil pertama adalah kartu As merah, kartu yang terambil kedua adalah kartu sepuluh dan kartu yang terambil ketiga adalah kartu yang lebih besar dari 3 tetapi lebih kecil dari 7 adalah $\frac{4}{5525}$.

5.Kaidah Baiyes

Dalil :

Jika kejadian–kejadian B_1, B_2,…., B_k merupakan sekatan dari ruang contoh S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2,3,...,k$



maka untuk sembarang kejadian A yang bersifat $P(A) \neq 0$:

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r).P(A/B_r)}{P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + ...+ P(B_k).P(A/B_k)}$$

untuk $r = 1,2,...,k$

Bukti :

$$P(B_r / A) = \frac{P(A \cap B_r)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_r).P(A/B_r)}{P(A)}$$

Kita tahu bahwa :

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup .... \cup (B_k \cap A)$$

$$P(A) = P((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup .... \cup (B_k \cap A))$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + ... + P(B_k \cap A)$$

$$P(A) = P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + ... + P(B_k).P(A/B_k)$$

Sehingga :

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r).P(A/B_r)}{P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + \text{............} + P(B_k).P(A/B_k)}$$

Contoh :

Dalam suatu organisasi, terdapat 3 calon ketua yaitu Tono, Tini dan Ani. Peluang Tono menjadi ketua adalah 0,3 , peluang Tini menjadi ketua adalah 0,5, dan peluang Ani menjadi ketua adalah 0,2. Seandainya Tono menjadi ketua, maka peluang terjadinya kenaikan iuran anggota adalah 0,8. Seandainya Tini menjadi ketua maka peluang terjadinya kenaikan iuran anggota adalah 0,1 dan seandainya Ani terpilih menjadi ketua, maka peluang terjadinya kenaikan iuran anggota adalah 0,4. Berapakah peluang Tini menjadi ketua organisasi tersebut ?

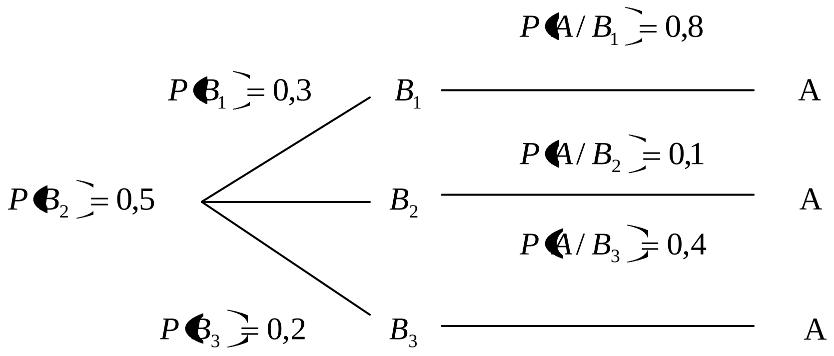
Jawab

Mis : B_1 = kejadian Tono menjadi ketua organisasi

B_2 = kejadian Tini menjadi ketua organisasi

B_3 = kejadian Ani menjadi ketua organisasi

A = kejadian terjadinya kenaikan iuran anggota



Maka : $P(B_2 / A) = \dfrac{P(B_2).P(A/B_2)}{P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)}$

$$= \frac{0{,}5 \times 0{,}1}{(0{,}3 \times 0{,}8) + (0{,}5 \times 0{,}1) + (0{,}2 \times 0{,}4)}$$

$$= \frac{0{,}05}{0{,}24 + 0{,}05 + 0{,}08}$$

$$= \frac{0{,}05}{0{,}37}$$

$$= \frac{5}{37}$$

Jadi peluang Tini menjadi ketua organisasi tersebut adalah $\frac{5}{37}$.